Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу, Србија
http://www.pmf.ni.ac.rs/mii
Математика и информатика 3(1) (2015), 17-40

Primena izvoda funkcije

Mirjana Dimitrijević
student prve godine na Departmanu za matematiku, PMF Niš
mirjanadimitrijevic@hotmail.com

1. UVOD

Izvod funkcije jedan je od osnovnih pojmova infintezimalnog računa i zasniva se na pojmu granične vrednosti funkcije u tački. Nastaje u XVII veku iz potrebe da se reše problemi u matematici i fizici, a njegova primena u matematičkim naukama je sve brojnija.

U ovom radu je nakon kratkog istorijskog osvrta predstavljena definicija izvoda preko problema tangente i brzine kretanja, a zatim i osnovne operacije s njima, izvodi složenih i inverznih funkcija, elementarnih funkcija, kao i dvostruki izvodi i izvodi višeg reda. U narednom poglavlju su kao primeri primene izvoda u matematici izložene Fermaova, Rolova, Lagranžova, Košijeva i Lopitalova teorema, sa dokazima istih i odgovarajućim primerima, nakon čega je data primena izvoda na ispitivanje toka funkcije. Široko polje primene izvoda pokriva i druge nauke. Poslednje poglavlje rada prikazuje na koji se način izvod koristi pri nalaženju brzine i ubrzanja tela i drugih osnovnih fizičkih veličina mehanike i dinamike.

2. ISTORIJAT

Razvoj analitičke geometrije XVII veka propraćen je nizom radova evropskih matematičara na polju infinitezimalnog računa.

Iako su pojmovi integracije i diferenciranja uvedeni vek kasnije - izvod je, na primer, uveden tek 1772. godine – na njima je još 1629. godine počeo da radi francuski matematičar i pravnik Pjer Ferma[1], koji se njima služi pre svega u praktičnoj primeni. Teorijski pristup usvaja Bonaventura Kavalijeri[2], koji 1639. godine dolazi do formule za integral funkcije x^n. On uvodi kretanje nedeljivih - linija pri kretanju opisuje površ, a ova zapreminu, a koristi i fluks nedeljivih koji se kasnije, u nešto izmenjenom obliku, javlja kod Njutna. Njegovu knjigu *Metod za razvoj nove geometrije kontinualnih nedeljivih* (1635) Lajbnic označava kao početak nove analize. Kavalijerijev učenik, Evanđelista Toričeli[3], nastavlja rad svog učitelja nalaženjem integrala jednostavnih funkcija kada je data gornja granica integracije. Koristeći brzinu, vreme i pređeni put, dolazi do veze integrala i izvoda: integral brzine po vremenu daje pređeni put, a izvod

[1] Pierre de Fermat (1601-1665)
[2] Bonaventura Cavalieri (1598-1647), italijanski matematičar, poznat po tzv. Kavalijerijevom principu
[3] Evangelista Torricelli (1608-1647), italijanski fizičar i matematičar, pronalazač barometra

pređenog puta u vremenu - brzinu. Džon Volis[4] prenosi u Britaniju radove kontinentalnih matematičara i 1655. godine objavljuje *Aritmetiku beskonačnih* sa rešenjima različitih integrala koja sam pronalazi. Isak Barou[5] prilazi geometrijski integralnom i diferencijalnom računu, baveći se pre svega tangentom. Svoja istraživanja ne objavljuje, već predaje učeniku, Isaku Njutnu[6].

Infinitezimalnim računom se Njutn bavi u periodu između 1665. i 1670. godine, kada sastavlja tri rukopisa:

- 1665. – *Analiza pomoću jednačina sa beskonačnim članovima*
- 1666. – *O kvadraturi krivih*[7]
- 1670. – *Metode fluksija i beskonačnih redova*[8]

Dokazuje vezu izvođenja i integracije koju su započeli Toričeli i Barou. Upoznavši se sa Njutnovim radom, Lajbnic[9] nastavlja istraživanje i svoj doprinos daje uvodeći prigodan simbolizam i formulišući algoritme. Ova istraživanja počinje da objavljuje 1674. godine.

Rasprava između Njutna i Lajbnica oko toga kome treba pripisati otkriće izvoda počinje 1699. godine, a svoj pun mah dostiže 1711. godine. Njutnov je argument bio da je na pojmu izvoda počeo da radi još 1666. godine, međutim, svoja istraživanja ne objavljuje sve do 1704. godine. Tada postaje jasno da su Njutn i Lajbnic došli do istog rezultata, koristeći različitu notaciju i ispitujući drugačije probleme. Tokom godina su učenici sa obe strane iznosili nove argumente, ali rasprava nikada nije razrešena, pa se obojici naučnika pripisuje zasluga za konačno formiranje i povezivanje sistema integrala i diferencijala, na kome su od početka veka radili evropski matematičari.

3. IZVOD FUNKCIJE

Potreba za izvodom funkcije javila se prilikom pokušaja da se pronađe univerzalni način za određivanje tangente krive u geometriji i brzine kretanja u mehanici[10]. U daljem tekstu će pojam izvoda biti definisan kroz ova dva problema, a zatim će slediti objašnjenje osnovnih operacija sa izvodom, izvoda složene i inverzne funkcije, elementarnih funkcija, drugog izvoda i izvoda višeg reda.

[4] John Wallis (1616-1703), engleski matematičar, između ostalog uveo simbol za beskonačno
[5] Isaac Barrow (1630-1677), engleski teolog i matematičar
[6] Sir Isaac Newton (1643-1727), engleski fizičar i matematičar
[7] Ovaj rad Njutn objavljuje tek 1704. godine kao dodatak *Optici*
[8] Objavljen posthumno 1736. godine
[9] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), nemački filozof i matematičar
[10] Problemom tangente se bavio Lajbnic, a brzinom Njutn.

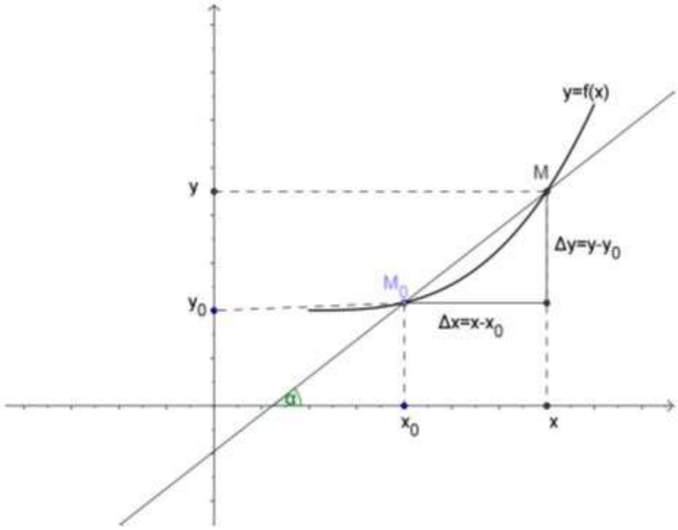
3.1 TANGENTA

Neka su $M_0(x_0, y_0)$ i $M(x, y)$ proizvoljne tačke krive[11] $y = f(x)$ (slika 1.). Tada je prava M_0M sečica date krive, a njen nagib, ugao između prave M_0M i pozitivnog dela x-ose, određen je koeficijentom pravca koji je jednak

$$\operatorname{tg} \alpha = k = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad .$$

Ako se uzme u obzir da je $y_0 = f(x_0)$ i $y = f(x)$, prethodna formula se može napisati u obliku

$$k = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$



Slika 1.

Izraz $x - x_0$ je *priraštaj nezavisno promenljive* i obeležava se sa $\Delta f(x_0)$. *Priraštaj zavisno promenljive*, odnosno Δy, zove se još i *priraštaj funkcije f* u tački x_0 i označava se kao $f(x_0)$:

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Tada je

$$k = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

odnosno koeficijent pravca sečice je količnik priraštaja funkcije i priraštaja nezavisno promenljive.

Neka se sada tačka M, ostajući na datoj krivoj, približava tački M_0. Zbog neprekidnosti funkcije to znači da x teži x_0 i y teži y_0, tj. da priraštaji Δx i $\Delta f(x_0)$ teže

[11] Kriva je geometrijski pojam, apstrakcija obične predstave krive linije. U ovom radu biće predstavljene samo dvodimenzionalne krive, ali se u diskusiju pojma nećemo udubljivati.

nuli. Ako izraz k teži nekoj određenoj vrednosti $k_0 = tg\alpha_0$, ta granična prava je tangenta grafika funkcije $y = f(x)$ u tački $M_0(x_0, y_0)$. Dakle,

$$tg\alpha_0 = k_0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ova granična vrednost je *izvod funkcije f u tački x_0* i označava se sa $y'(x_0)$ ili $f'(x_0)$[12]. Ako ona postoji i konačna je, tangenta krive $y = f(x)$ u tački M_0 imaće jednačinu:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

3.2 BRZINA

Neka se materijalna tačka kreće po pravoj (na primer, x-osi) po zakonu $x = f(t)$, tj. neka se u trenutku t nalazi u tački sa koordinatom $x = f(t)$. Kako bi se došlo do izraza za trenutnu brzinu, potrebno je posmatrati položaje tačke u trenucima t_0 i $t = t_0 + \Delta t$. Koordinate ovih položaja su $x_0 = f(t_0)$ i $x = f(t) = f(t_0 + \Delta t)$. *Srednja brzina* tačke u intervalu vremena $[t_0, t]$ definiše se kao količnik promene (priraštaja) puta koji tačka pređe i odgovarajućeg priraštaja vremena $\Delta t = t - t_0$:

$$v_{sr} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta f(t_0)}{\Delta t}.$$

Ako sada t teži t_0, tj. ako priraštaj vremena $\Delta \mathrm{t}$ teži nuli, ta srednja brzina može imati određenu graničnu vrednost i ona predstavlja *trenutnu brzinu* materijalne tačke:

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} v_{sr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Dakle, trenutna brzina je granična vrednost količnika promene puta i promene vremena, kada ta promena vremena teži nuli. Analogno primeru tangente, brzina je *izvod funkcije $x = f(t)$ u tački t_0*.

3.3 POJAM IZVODA FUNKCIJE

Analogno prethodnim primerima može se definisati pojam izvoda u tački proizvoljne realne funkcije realne promenljive.

Neka je funkcija f definisana na nekom podskupu A skupa realnih brojeva, sa vrednostima u **R**, tj. neka $f : A \to \boldsymbol{R}$ i neka tačka x_0 pripada skupu A zajedno sa nekom svojom okolinom: $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$. Kao i ranije, priraštaj nezavisno promenljive je $\Delta x = x - x_0$ $(x \in A)$, a priraštaj funkcije $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Definicija 1. Ako postoji konačna granična vrednost

[12] U upotrebi su još i oznake $\frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, Dy, Df(x), \dot{y}$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

kaže se da je funkcija f diferencijabilna (ima izvod) u tački x_0, a taj limes je izvod funkcije f u tački x_0 i označava se sa

$$y'(x_0)=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Funkcija f je diferencijabilna na intervalu (a,b) ako je diferencijabilna u svakoj tački intervala (a,b).

U narednim primerima pokazaćemo kako se po definiciji nalaze izvodi nekih elementarnih funkcija.

Primer 1. Neka je $f(x)=C=\text{const.}$ za svako x. Tada je za proizvoljno x $f(x+\Delta x)=C$, pa je:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0 \qquad (\Delta x\neq 0).$$

Dakle, izvod konstante jednak je nuli, tj. $(C)'=0$.

Primer 2. Odrediti izvod funkcije $f(x)=\sqrt{x}$ u tački $x=1$. Neka je Δx takav da je $1+\Delta x>0$ (dovoljno je uzeti da je $\Delta x>0$). Tada je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+\Delta x}-1}{\Delta x}\cdot\frac{\sqrt{1+\Delta x}+1}{\sqrt{1+\Delta x}+1}=\frac{1+\Delta x-1}{\Delta x\left(\sqrt{1+\Delta x}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+\Delta x}+1}$$

Kada $\Delta x\to 0$, iz ovoga se dobija da je $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{2}$, tj. $f'(1)=\frac{1}{2}$.

Primer 3. Neka je $f(x)=x^n$, $n\in\boldsymbol{N}$. Tada je izvod funkcije za $x\neq 0$:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}x^{n-1}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^n-1}{\frac{\Delta x}{x}}=x^{n-1}n=nx^{n-1}.$$

Za $x=0$ dobija se

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(0+\Delta x)^n-0^n}{\Delta x}=\begin{cases}1 & ,n=1\\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{n-1}=0, & n=2,3,\ldots\end{cases}$$

Ovaj slučaj se uklapa u prethodno dobijen rezultat za $x=0$, pa je dakle

$$f'(x)=nx^{n-1},\text{ ili }(x^n)'=nx^{n-1}.$$

Za $n=1,2,3,\ldots$, dobija se $x'=1$, $(x^2)'=2x$, $(x^3)'=3x^2$ itd.

Korišćenjem odgovarajuće granične vrednosti potpuno analogno se dolazi do izvoda funkcije $y = x^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, gde je x takvo da je funkcija definisana. Naime, dobija se

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Na primer, za $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \boldsymbol{N}$, tj. za funkciju $y = \sqrt[n]{x}$ dobija se

$$y' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Specijalno za funkciju $y = \sqrt{x}$ je $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Primenom ove formule brže se dolazi do rešenja primera 2.

3.4 LEVI I DESNI IZVOD FUNKCIJE

Definicija 2. Neka je $x_0 \in \boldsymbol{R}$. Ako je $f : (a, x_0] \to \boldsymbol{R}$ i ako postoji konačna ili beskonačna granična vrednost $\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, onda se ta granična vrednost zove *konačni ili beskonačni levi izvod funkcije* f *u tački* x_0 i obeležava se sa $f'_-(x_0)$.

Slično se definiše desni izvod funkcije $f : [x_0, b)$ u tački x_0:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Primer 4. Odrediti levi i desni izvod funkcije $f(x) = |x|$ u tački $x = 0$.

Kako je, po definiciji apsolutne vrednosti,

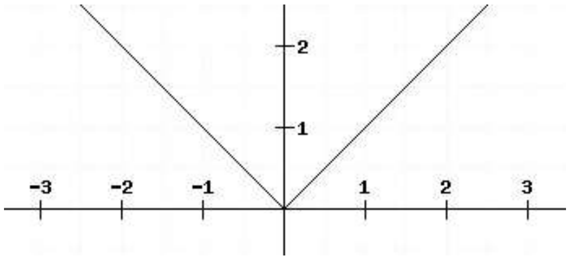
$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

to za tačku $x = 0$ važi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \Delta x < 0 \\ 1, & \Delta x \geq 0 \end{cases}$$

Zato je $f'_-(0) = -1$, a $f'_+(0) = 1$.

Dakle, ova funkcija nema izvod u tački $x_0 = 0$. Geometrijski, to znači da njen grafik (slika 2.) nema tangentu u tački $(0, 0)$.



Slika 2.

3.5 IZVOD ZBIRA, PROIZVODA I KOLIČNIKA

Teorema 1. Ako funkcije u i v imaju izvod u tački x, tada funkcija Cu ($C = const.$) i zbir, razlika, proizvod i količnik funkcija u i v (u slučaju količnika treba pretpostaviti da je $v(x) \neq 0$) takođe imaju izvod u tački x i pri tome važe formule:

1) $[Cu(x)]' = Cu'(x)$, $C = const.$
2) $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$
3) $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
4) $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

Dokaz.

1) Dokaz sledi neposredno iz činjenice da je $\lim_{\Delta x \to 0}\left(C\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = C\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$, gde je sa Δu označen priraštaj funkcije u u tački x koji odgovara priraštaju Δx.

2) Ako za neku funkciju f važi da je $f(x) = u(x) + v(x)$, onda je

$$f(x + \Delta x) = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x).$$

Razlika ove dve funkcije je:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = [u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)] =$$

$$= [u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)].$$

Deljenjem izraza sa $\Delta x > 0$ dobija se:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]}{\Delta x} + \frac{[v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x}.$$

Granična vrednost izraza kad $\Delta x \to 0$ je:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{[u(x+\Delta x) - u(x)]}{\Delta x} + \frac{[v(x+\Delta x) - v(x)]}{\Delta x}\right),$$

čime se dobija prvi izvod funkcije, tj. $f'(x) = u'(x) + v'(x)$, što je i trebalo dokazati.

Analogno ovom primeru dokazuje se i razlika izvoda funkcija, tj. $f'(x) = u'(x) - v'(x)$.

Naredna dva dokaza slična su dokazu 2) pa su ovde data po koracima, bez dodatnih objašnjenja.

3)

I $\quad f(x) = u(x)v(x)$

II $\quad f(x + \Delta x) = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x)$

III $\quad f(x + \Delta x) - f(x) = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) =$

$$= u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x+\Delta x)v(x) + u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x)$$

$$= u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x) - v(x)] + v(x)[u(x+\Delta x) - u(x)]$$

IV $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = u(x+\Delta x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} + v(x)\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$

V $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =$
$\lim_{\Delta x \to 0} \left(u(x+\Delta x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} + v(x)\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\right)$

VI $f'(x) = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$

4)

I $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

II $f(x+\Delta x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}$

III $f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}$

$$= \frac{v(x)u(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x)v(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{v(x)u(x+\Delta x) - u(x)v(x) - u(x)v(x+\Delta x) + u(x)v(x)}{v(x)v(x+\Delta x)}$$

$$= \frac{v(x)[u(x+\Delta x) - v(x)] - u(x)[v(x+\Delta x) - v(x)]}{v(x)v(x+\Delta x)}$$

IV $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{v(x)\left[\frac{u(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right] - u(x)\left[\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]}{v(x)v(x+\Delta x)}$

V $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{v(x)\left[\frac{u(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right] - u(x)\left[\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]}{v(x)v(x+\Delta x)}\right]$

VI $f'(x) = \frac{u\prime(x)v(x) - v\prime(x)u(x)}{v^2(x)}$

Primer 5. Primenom prethodnih pravila može se lako doći do izvoda ma kog polinoma. Koristeći i prethodno dokazanu formulu $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in N$ (primer 3.) imamo za polinom $P(x) = 2x^5 - 3x^3 + x^2 - 1$:

$$P'(x) = (2x^5)' - (3x^3)' + (x^2)' - (1)' = 2 \cdot 5x^4 - 3 \cdot 3x^2 + 2x = 10x^4 - 9x^2 + 2x$$

3.6 IZVOD SLOŽENE FUNKCIJE

Teorema 2. Ako funkcija u ima izvod u (fiksiranoj) tački x, a funkcija $y = f(u)$ ima izvod u tački $u = u(x)$, tada i složena funkcija $y = f\big(u(x)\big)$ ima izvod u tački x i pri tom važi formula $y' = f'(u)u'(x)$.

Dokaz. Neka je sa Δu označen priraštaj koji odgovara priraštaju Δx u tački x, tj. $\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x)$, a sa Δy priraštaj funkcije $y = f\big(u(x)\big)$ koji odgovara priraštaju Δx. Ako postoji okolina tačke x u kojoj je $\Delta u \neq 0$, tada je

$$\begin{aligned} y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\big(u(x+\Delta x)\big) - f\big(u(x)\big)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{u(x+\Delta x)-u(x)}\cdot\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\right] \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} \\ &= f'(u)\cdot u'(x) \end{aligned}$$

jer $\Delta u \to 0$ kada $\Delta x \to 0$, što sledi iz neprekidnosti funkcije u u tački x.

Ako je $\Delta u = 0$ na beskonačno mnogo mesta, proizvoljno blizu tački x, tada je $\Delta y = f\big(u(x+\Delta x)\big) - f\big(u(x)\big) = f(u+\Delta u) - f(u) = 0$ na beskonačno mnogo mesta proizvoljno blizu tački x, tj. i odnos $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bi bio jednak nuli na beskonačno mnogo mesta, proizvoljno blizu tački x, pa je $y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$. Dakle, formula $y' = f'(u)u'(x)$ važi i u ovom slučaju. Ona se često piše i u obliku ${y_x}' = {f_u}'{u_x}'$. ∎

Primer 6. U slučaju funkcije $y = e^{\sin x}$, stavljajući $u = \sin x$, dobija se da je

$$y' = (e^u)'_u(\sin x)'_x = e^u\cos x = e^{\sin x}\cos x.$$

Primer 7. Naći izvod funkcije $y = x^x$ $(x > 0)$.

Rešenje. Data funkcija može se napisati u obliku $y = e^{x\ln x}$, tj. $y = e^u$, gde je $u = x\ln x$. Zato je

$$y' = (e^u)_u{}'u_x{}' = e^u(x\ln x)' = e^{x\ln x}\left(1\cdot\ln x + x\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1).$$

3.7 IZVOD INVERZNE FUNKCIJE

Teorema 3. Neka za funkciju $y = f(x)$ postoji inverzna funkcija $x = [f(y)]^{-1}$ u okolini fiksirane tačke x_0. Ako postoji izvod funkcije $y = f(x)$ u takvoj tački x_0 i pri tom je $f'(x_0) \neq 0$, tada postoji i izvod inverzne funkcije $x = [f(y)]^{-1}$ u tački $y_0 = f(x_0)$ i jednak je $\frac{1}{f'(x_0)}$.

Dokaz. Ako se uzmu u obzir oznake $\Delta y = y - y_0$, $\Delta x = x - x_0$ i definicija izvoda funkcije, kao i to da je $\Delta x \to 0 \Leftrightarrow \Delta y \to 0$ (zbog neprekidnosti inverzne funkcije u tački $y_0 = f(x_0)$), dobija se:

$$x'(y_0) = (f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Dakle, $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

U dokazu je pretpostavljeno da je $\Delta y \neq 0$, što sledi iz činjenice da je $f'(x_0) \neq 0$. Naime, ako je recimo $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, onda postoji okolina tačke x_0 takva da je $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, što povlači da je $\Delta y \neq 0$ u toj okolini. Analogan je slučaj $f'(x_0) < 0$. ∎

Primer 8. Funkcija $y = \log_a x$ je inverzna funkciji $x = a^y$ (gde je $0 < a \neq 1$ i $x > 0$). Zato, primenom prethodno dokazane formule, koristeći x i y umesto x_0 i y_0 dobija se:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Dakle,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \ (0 < a \neq 1, x > 0).$$

Specijalno, za $a = e$ dobija se

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

3.8 IZVODI ELEMENTARNIH FUNKCIJA

Pomoću definicije izvoda, pravila i teorema koje se odnose na složene funkcije, ili inverzne funkcije nekih funkcija, mogu se lako naći izvodi elementarnih funkcija. U primeru 3 je dat postupak nalaženja izvoda funkcije $f(x) = x^n$. Ovde su elementarne funkcije i njihovi izvodi dati u tabeli na slici 3, bez dokazivanja.

3.9 DRUGI IZVOD I IZVODI VIŠEG REDA

Neka realna funkcija f ima izvod $f'(x)$ za svako $x \in (a, b)$. Izvod f' je sada funkcija od x, pa možemo tražiti izvod funkcije f'. Izvod od izvoda funkcije je *drugi izvod* funkcije i označava se sa f''. Dakle, po definiciji je

$$f''(x) = [f'(x)]'.$$

U fizičkom smislu, drugi izvod predstavlja brzinu promene trenutne brzine pravolinijskog kretanja, tj. ubrzanje. Ubrzanje kod pravolinijskog kretanja, sa zakonom puta $s = s(t)$, jednako je drugom izvodu puta po vremenu:

$$a = \left(s'(t)\right)' = s''(t).$$

FUNKCIJA	IZVOD FUNKCIJE
y=C=const.	y'=0
$y=x^{a}$ ($a \in$ R , $a \neq 0$, x>0)	$y'=ax^{a-1}$
$y=\sqrt{x}$ (x>0)	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y=\frac{1}{x}$ (x>0)	$y'=-\frac{1}{x^2}$
$y=e^x$	$y'=e^x$
$y=\log_a x$ (0<a≠1, x>0)	$y'=\frac{1}{x\ln a}$
$y=a^x$ (0<a≠1)	$y'=a^x\ln a$
y=ln x (x>0)	$y'=\frac{1}{x}$
y= sin x	y'= cos x
y= cos x	y'= - sin x
y= tg x (x≠π+kπ, k∈Z)	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$
y=ctg x (x≠kπ, k∈Z)	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
y= arcsin x (-1<x<1)	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
y= arccos x (-1<x<1)	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
y= arctg x	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
y= arcctg x	$y'=-\frac{1}{1+x^2}$

Slika 3.

Po analogiji sa drugim izvodom mogu se definisati i izvodi trećeg, četvrtog, ... , *n*-tog reda. Preciznije, *n*-tim izvodom funkcije f naziva se izvod izvoda (*n*–1)-og reda funkcije f. Izvod *n*-tog reda obeležava se sa $y^{(n)}$ ili $f^{(n)}(x)$. Dakle, po definiciji je $y^{(n)} = (y^{n-1})'$ ili $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Primer 9. Za funkciju $y = x^n$, $n \in \boldsymbol{N}$**,** dobija se:

$$y' = nx^{n-1}$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2}$$

$y^{(n-m)} = n(n-1)\dots(n-m+1)x^{n-m}$ za $m \leq n$, specijalno $y^{(n)} = n!$

dok $y^{(n+k)} = 0$ za $k = 1,2,\dots$.

3.10 DIFERENCIJAL

Posmatrajmo priraštaj funkcije $\boldsymbol{y = x^3}$ u proizvoljnoj fiksiranoj tački $\boldsymbol{x_0}$, ako je priraštaj nezavisno promenljive $\Delta\boldsymbol{x}$. Tada je:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

ili

$$\Delta y = 3x_0^2\Delta x + (3x_0\Delta x + (\Delta x)^2)\Delta x.$$

Ako stavimo $3x_0^2 = A$, $3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = \alpha(\Delta x)$, tada broj A ne zavisi od Δx, dok je $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Sada priraštaj ima oblik

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Ako je $x_0 \neq 0$, tada je $A \neq 0$, pa iz prethodne jednačine vidimo da se priraštaj Δy može prikazati kao zbir dva sabirka, $A\Delta x$ i $\alpha(\Delta x)\Delta x$, koji teže nuli kada $\Delta x_0 \to 0$, ali ako potražimo graničnu vrednost količnika

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{A\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{A} = 0,$$

zaključićemo da veličina $\alpha(\Delta x)\Delta x$ brže teži nuli nego veličina $A\Delta x$, kada $\Delta x \to 0$. Zato se $A\Delta x$ naziva glavnim delom priraštaja Δy.

Definicija 3. Funkcija f naziva se diferencijabilnom u tački x_0, ako priraštaj funkcije Δy u toj tački koji odgovara priraštaju Δx ima oblik $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, gde je A broj koji ne zavisi od Δx, a $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Veličina $A\Delta x$ zove se diferencijal funkcije f u tački x_0 i obeležava se sa dy:

$$dy = A\Delta x.$$

Iz prethodnog primera funkcije $y = x^3$ zaključujemo da je ova funkcija diferencijabilna u proizvoljnoj tački x_0 i da je diferencijal funkcije u istoj tački (pri priraštaju Δx) jednak $dy = 3x_0^2\Delta x$.

Naredna teorema više objašnjava pojam diferencijabilnosti.

Teorema 4. Da bi funkcija f bila diferencijabilna u tački x_0, potrebno je i dovoljno da ima izvod u toj tački.

Dokaz. Dokažimo da je uslov potreban. Zaista, ako je funkcija diferencijabilna u tački x_0, priraštaj funkcije u toj tački može se prikazati u obliku $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, odakle je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x).$$

Iz poslednje relacije imamo da je $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A$, tj. $f'(x_0) = A$, pa izvod u tački x_0 postoji.

Obrnuto, ako postoji granična vrednost $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ i ako stavimo da je $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$, tada će $\alpha(\Delta x)$ težiti nuli, kada $\Delta x \to 0$, dok je

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Time smo pokazali da je i prikaz $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ zastupljen, tj. da je funkcija f diferencijabilna u tački x_0, pa je uslov u teoremi dovoljan. ■

Iz prethodne teoreme zaključujemo da se pojam egzistencije izvoda u nekoj tački poklapa sa pojmom diferencijabilnosti funkcije u istoj tački. Zbog toga se često operacija traženja izvoda naziva diferenciranjem.

Iz teoreme 4. zaključujemo da ako postoji izvod funkcije u tački x_0, tada je diferencijal funkcije u istoj tački jednak

$$dy = f'(x_0)\Delta x.$$

Ako je $\Delta x = dy$, tada dx nazivamo diferencijalom nezavisno promenljive x. Opravdanje za ovakvu oznaku možemo naći i u činjenici da za funkciju $y = x$ imamo $dy = dx = \Delta x$. Sada iz prethodne relacije sledi

$$dy = f'(x_0)dx.$$

Iz ove relacije dobijamo $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$, pa se može reći da je izvod $f'(x_0)$ jednak količniku diferencijala funkcije dy i diferencijala nezavisno promenljive dx u tački x_0.

Ako u relaciji $dy = f'(x_0)dx$ stavimo x umesto x_0, biće $dy = f'(x)dx$. Tako ćemo, recimo, za funkcije $y = x^n$, $y = a^x$, $y = \sin x$,..., imati redom $d(x^n) = nx^{n-1}dx$, $d(a^x) = a^x \ln a\, dx$, $d(\sin x) = \cos x\, dx$, ... Na takav način bismo mogli da formiramo tablicu diferencijala osnovnih elementarnih funkcija, analognu tablici izvoda istih funkcija.

Iz relacije $dy = f'(x)dx$ i pravila za traženje izvoda zbira (razlike), proizvoda i količnika dveju funkcija, imamo sledeća pravila za nalaženje diferencijala zbira, proizvoda i količnika dveju funkcija:

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(uv) = vdu \pm udv$$

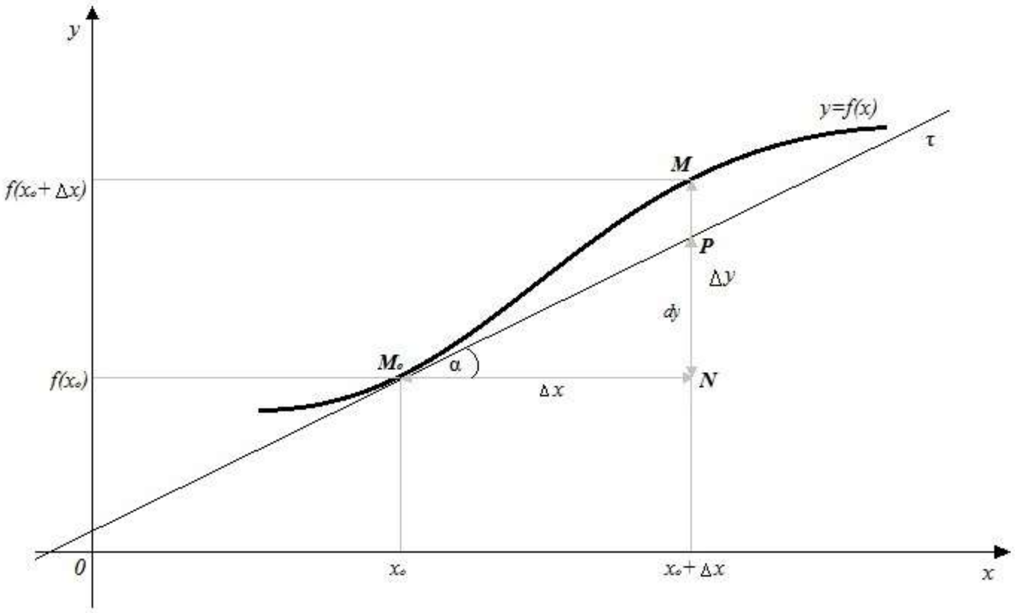
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Neka je $y = f(x)$, a $x = \psi(t)$, tj. neka x nije nezavisno promenljiva, već funkcija nezavisno promenljive t. Tada je $dy = y'_t dt$. Kako je složena funkcija, to je $y'_t = y'_x x'_t$, pa je

$$dy = y'_t dt = y'_x x'_t dt = y'_x dx = f'(x)dx$$

jer je $dx = x'_t dt$. Znači, oblik diferencijala funkcije ne zavisi od toga da li je x nezavisno promenljiva ili posredna promenljiva (tj. funkcija neke nezavisno promenljive). Ovo je svojstvo invarijantnosti diferencijala.

Diferencijal funkcije ima i jednostavno geometrijsko tumačenje. Naime, sa slike 4. iz ΔM_0NP zaključujemo da je $NP = M_0N \operatorname{tg}\alpha = \Delta x f'(x_0)$, tj. $NP = dy = f'(x_0)dx$, pa je diferencijal funkcije jednak priraštaju funkcije određene tangentom τ grafika funkcije u tački $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$. S druge strane je $NM = \Delta y$ priraštaj funkcije, a $PM = \Delta y - dy$ veličina koju smo prethodno označavali sa $\alpha(\Delta x)$.



Slika 4.

Iz prethodnih razmatranja o priraštaju funkcije i diferencijalu zaključili smo da je

$$\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

gde, kada $\Delta x \to 0$, veličina $\alpha(\Delta x)\Delta x \to 0$, ali mnogo brže nego diferencijal, tj. priraštaj funkcije Δy je približno jednak diferencijalu dy za male vrednosti Δx. Taj podatak može korisno poslužiti kod približnih izračunavanja. Naime, iz $\Delta y \approx dy$ (naravno, za Δx blisko nuli) sledi

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x,$$

odakle je

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Iz ove relacije vidimo da se vrednost funkcije f za vrednosti nezavisno promenljive koje su bliske vrednosti x_0, približno zamenjuje linearnom funkcijom.

Primer 10. Izračunati približno vrednost $\sqrt{4{,}03}$.

Rešenje. U ovom slučaju posmatraćemo funkciju $f(x) = \sqrt{x}$ u tački $x_0 + \Delta x$, gde je $x_0 = 4$, $\Delta x = 0{,}03$. Kako je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, to približna formula $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ sada ima oblik

$$\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\Delta x.$$

Stavljajući u poslednju formulu $x_0 = 4$, $\Delta x = 0{,}03$, dobićemo

$$\sqrt{4{,}03} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}0{,}03 = 2{,}0075.$$

Uopšte, ako posmatramo *n*-ti koren, možemo dobiti približnu formulu (kada je Δx blisko nuli)

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{x_0}}{x_0}\Delta x.$$

Na primer, ako treba približno izračunati $\sqrt[3]{25}$, onda možemo postupiti na sledeći način

$$\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{27 - 2} = 3\sqrt[3]{1 - \frac{2}{27}} \approx 3\left(\sqrt[3]{1} + \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{1}}{1}\left(-\frac{2}{27}\right)\right) = 2{,}9259...$$

gde smo u poslednjem korenu primenili približnu formulu $\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{x_0}}{x_0}\Delta x$, stavljajući $n = 3$, $x_0 = 1$, $\Delta x = -\frac{2}{27}$.

4. PRIMENE IZVODA FUNKCIJE U MATEMATICI

4.1 FERMAOVA[13] TEOREMA

Definicija 3. Neka je realna funkcija *f* definisana u nekoj okolini tačke $c \in \boldsymbol{R}$. Tačka *c* se naziva *tačkom lokalnog maksimuma* (odnosno minimuma), a vrednost $f(c)$ lokalnim maksimumom (odn. lokalnim minimumom) funkcije *f* ako postoji δ-okolina tačke *c* (tj. interval $U_\delta = (c - \delta, c + \delta)$), tako da je za svako $x \in U_\delta$ ispunjeno

$$f(x) \le f(c) \qquad \text{(odn. } f(x) \ge f(c)\text{)}.$$

Ako funkcija *f* ima u tački *c* lokalni minimum ili lokalni maksimum, kaže se da ona u toj tački ima *lokalni ekstremum*.

Teorema 5. Neka je $U_\delta = (c - \delta, c + \delta)$ δ-okolina tačke $c \in \boldsymbol{R}$ i funkcija $f : U_\delta \to \boldsymbol{R}$ diferencijabilna u tački *c*. Ako funkcija *f* u tački *c* ima lokalni ekstremum, onda je $f'(c) = 0$.

[13] Pierre de Fermat (1601-1665) – francuski matematičar i pravnik u tuluskom parlamentu. Veliki doprinos matematici ostavio je na poljima diferencijalnog računa, teorije brojeva i analitičke geometrije.

Dokaz. Neka funkcija f ima u tački c lokalni maksimum, tako da je za svako $x \in U_\delta$ ispunjeno $f(x) \leq f(c)$. Po definiciji izvoda je

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c},$$

pri čemu taj limes ne zavisi od toga da li se x približava tački c sleva ili zdesna. No, za $x > c$ je

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0,$$

pa prelaskom na limes kad x teži c sa desne strane $(x \to c+0)$ dobijamo $f'(c) \geq 0$. Za $x < c$ je, međutim,

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0,$$

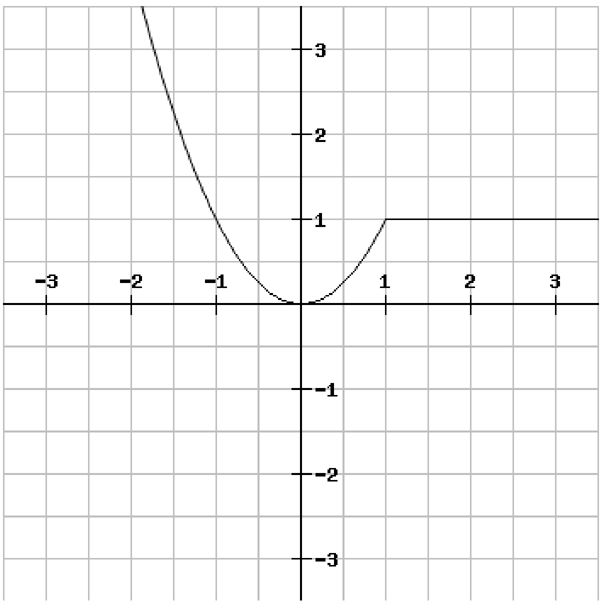
pa kad x teži c sleva $(x \to c-0)$ dobijamo $f'(c) \geq 0$. Na taj način, mora biti $f'(c) = 0$, što je i trebalo dokazati. ■

Geometrijska interpretacija. Ako funkcija ima lokalni ekstremum u tački u kojoj je diferencijabilna, tj. njen grafik ima tangentu, onda ta tangenta mora biti paralelna x-osi.

Primer 11. Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2, za\ x < 1 \\ 1, za\ x \geq 1 \end{cases}$$

čiji je grafik prikazan na slici 5, ima u tački $x = 0$ lokalni minimum jednak nuli, a u tački $x = 1$ lokalni maksimum jednak 1. U svakoj tački $x > 1$ ona ima i lokalni maksimum i lokalni minimum jednak 1 (pri tome nije bitno što ona na svom domenu uzima i veće i manje vrednosti od 1).



Slika 5.

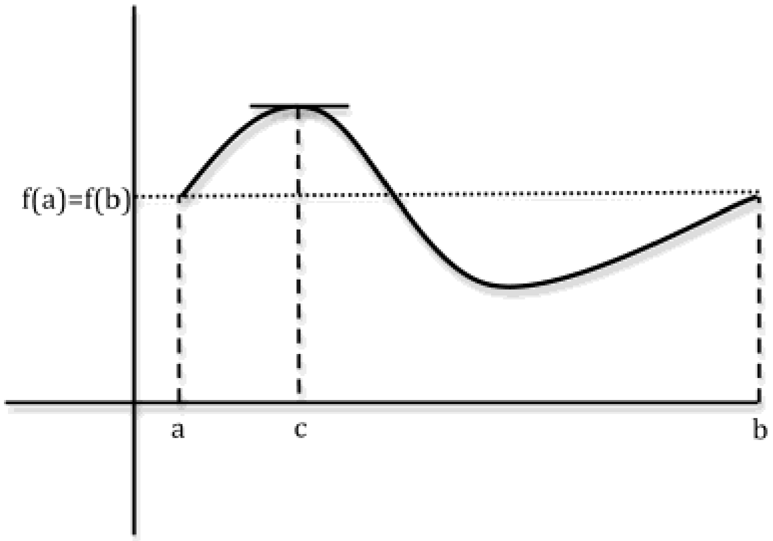
4.2 ROLOVA[14] TEOREMA

Teorema 6. Neka je funkcija $f\,:[a,b]\to \boldsymbol{R}$:

1) neprekidna u svim tačkama segmenta $[a,b]$;
2) diferencijabilna u svim tačkama intervala (a,b);
3) ima jednake vrednosti na krajevima tog segmenta: $f(a)=f(b)$.

Tada postoji tačka $c\in(a,b)$, takva da je $f'(c)=0$.

Geometrijska interpretacija. Ako su ordinate krive $y=f(x)$ u tačkama $x=a$ i $x=b$ jednake, onda postoji bar jedna tačka koja pripada delu te krive između tačaka $\big(a,f(a)\big)$ i $\big(b,f(b)\big)$ i u kojoj je tangenta paralelna x-osi (slika 6.).



Slika 6.

Dokaz. Kako je funkcija f neprekidna na segmentu $[a,b]$, ona na tom segmentu dostiže svoju minimalnu vrednost m i maksimalnu vrednost M, tj. postoje tačke $x_m,\ x_M\in[a,b]$, takve da je

$$f(x_m)=m=\min_{a\le x\le b}f(x),\qquad f(x_M)=M=\max_{a\le x\le b}f(x)$$

Odavde se mogu razmotriti dva slučaja:

1) $M=m$

Tada je funkcija f konstantna na $[a,b]$: $f(x)=m=M$ za $a\le x\le b$, pa je $f'(x)=0$ za sve $x\in(a,b)$.

2) $M>m$

[14] Michael Rolle (1652-1719) – francuski matematičar. Pristupio Kraljevskoj akademiji nauka 1685. godine, a već 1699. postao *Pensionnaire géometre* Akademije. U svom najznačajnijem delu *Traité d'algèbre* (1690) uvodi oznaku $\sqrt[n]{x}$ za *n*-ti koren iz *x*. Doprineo je razvoju infinitezimalnog računa i Gausove metode zamene.

Kako je $f(a) = f(b)$, u ovom slučaju ne mogu obe vrednosti m i M biti dostignute u nekom od krajeva segmenta $[a, b]$, tj. bar jedna od tačaka x_m, x_M nalazi se u unutrašnjosti intervala (a, b). Neka je, na primer, $x_M \in (a, b)$. Prema Fermaovoj teoremi (teorema 5.) mora biti $f'(x_M) = 0$, pa se može uzeti $c = x_M$. ■

4.3 LAGRANŽOVA[15] TEOREMA

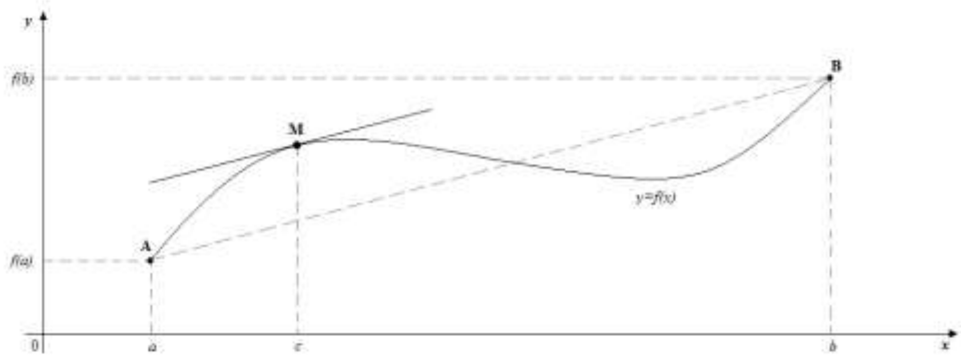
Teorema 7. Neka je funkcija $f: [a, b] \to \boldsymbol{R}$

1) neprekidna u svim tačkama segmenta $[a, b]$;
2) diferencijabilna u svim tačkama intervala (a, b).

Tada postoji tačka $c \in (a, b)$, takva da je

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Geometrijska interpretacija. Neka posmatrana sečica krive $y = f(x)$ spaja tačke $A(a, f(a))$ i $B(b, f(b))$ kao što je prikazano na slici 7. Tada je njen koeficijent pravca $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Po Lagranžovoj teoremi, na luku krive između A i B postoji bar jedna tačka $M(c, f(c))$, takva da tangenta krive u toj tački ima koeficijent pravca $f'(c)$ jednak $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, tj. da je tangenta paralelna posmatranoj sečici.



Slika 7.

Dokaz. Posmatrana pomoćna funkcija $F : [a, b] \to \boldsymbol{R}$ definisana je sa

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a).$$

Ona je neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna na (a, b), pri čemu je

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

15 Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) – italijansko-francuski matematičar i astronom. Najznačajniji doprinos ostvario na poljima analize, teorije brojeva, klasične i nebeske mehanike.

Takođe je $F(a) = F(b) = f(a)$, pa funkcija zadovoljava uslove Rolove teoreme (teorema 6.). Zato postoji tačka $c \in (a,b)$, takva da je $F'(c) = 0$, tj. $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, što je i trebalo dokazati. ■

4.4 KOŠIJEVA[16] TEOREMA

Košijeva teorema o srednjoj vrednosti predstavlja uopštenje Lagranževe teoreme.

Teorema 8. Neka su funkcije $f, g: [a,b] \to \boldsymbol{R}$:

1) neprekidne u svim tačkama segmenta $[a,b]$;
2) diferencijabilne u svim tačkama intervala (a,b), pri čemu je $g'(x) \neq 0$ za $x \in (a,b)$.

Tada postoji tačka $c \in (a,b)$, takva da je

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dokaz. Za posmatranu funkciju važi da je $g(a) \neq g(b)$, jer bi u protivnom iz Rolove teoreme sledilo da je $g'(x) = 0$ za neko $x \in (a,b)$, suprotno pretpostavci. Neka je data funkcija neprekidna na $[a,b]$ i diferencijabilna u (a,b), tako da je

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x).$$

Neposredno se proverava da je

$$F(a) = \frac{f(a)g(b)-f(b)g(a)}{g(b)-g(a)} = F(b),$$

pa funkcija zadovoljava uslove Rolove teoreme (teorema 6.) na segmentu $[a,b]$. Zato postoji tačka $c \in (a,b)$, takva da je

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0,$$

što se može zapisati i u traženom obliku koji se dokazuje. ■

[16] Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) – francuski matematičar, profesor univerziteta u Parizu. Jedan je od tvoraca teorije funkcija kompleksne promenljive. Radio je na polju teorije brojeva, matematičke analize, teorije diferencijalnih i parcijalnih jednačina, teorije poliedara, teorijske i nebeske mehanike, matematičke analize i drugim oblastima matematike i njenih primena. Doprineo je razvoju teorije talasa u optici i teorije elastičnosti.

4.5 LOPITALOVA[17] TEOREMA

Lopitalova teorema ili Lopitalovo pravilo se najčešće koristi pri određivanju graničnih vrednosti u kojima se javlja neodređen izraz ($\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 1^{\infty}$ i sl.).

Teorema 9. Neka su funkcije $f, g : [a, b) \to \boldsymbol{R}$:

1) Neprekidne u intervalu $[a, b)$;
2) Diferencijabilne u (a, b), pri čemu je $g'(x) \neq 0$ za $x \in (a, b)$;
3) $f(a) = g(a) = 0$.

Ako postoji (konačan ili beskonačan) $\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, onda postoji i $\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ i važi jednakost

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dokaz. Neka je $\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ tako da $L \in \boldsymbol{R}$. Za proizvoljno $\varepsilon > 0$ uzima se neko $\delta > 0$ tako da je $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \varepsilon$ za svako x za koje je $a < x < a + \delta$. Za proizvoljno $x \in (a, a + \delta)$ primenjuje se Košijeva teorema o srednjoj vrednosti (teorema 8.) na funkcije f i g u intervalu $[a, x]$. S obzirom na uslov 3) teoreme, sledi da postoji $c \in (a, x)$, takvo da je

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Zato je $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - L\right| < \varepsilon$, za sve $x \in (a, a + \delta)$, čime je dokazano da je

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \blacksquare$$

Bez bitnih izmena dokazuje se da prethodno tvrđenje važi i kada je u pitanju levi limes umesto desnog, kao i dvostrani limes. Takođe, moguće je i da jedna ili obe od funkcija f i g ne budu definisane u tački a, ali da je u tom slučaju $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, odnosno $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.

Posledica. Neka su funkcije $f, g: (a - \delta, a + \delta)\backslash\{a\} \to \boldsymbol{R}$:

1. diferencijabilne u intervalima $(a - \delta, a)$ i $(a, a + \delta)$ pri čemu je $g'(x) \neq 0$ za $x \in (a - \delta, a + \delta), x \neq a$;
2. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.

[17] Guillaume François Antoine de L'Hospital (1661-1704) – francuski matematičar. Bio je kapetan u vojsci, ali je zbog kratkovidosti napušta i posvećuje se matematici. Svoju najpoznatiju teoremu iz oblasti infinitezimalnog računa razvio je uz pomoć švajcarskog matematičara Johana Bernulija (Johann Bernoulli), ali ona ipak nosi Lopitalovo ime.

Ako postoji (konačan ili beskonačan) $\lim_{x\to a} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$, onda postoji i $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ i važi jednakost

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}.$$

Primer 12. Odrediti graničnu vrednost $\lim_{x\to 0} \frac{tg\, x - x}{x - \sin x}$.

Rešenje. Svi uslovi prethodne posledice su ispunjeni za funkcije $f(x) = tg\, x - x$ i $g(x) = x - \sin x$: one su definisane, neprekidne i diferencijabilne u nekoj okolini tačke 0, pri čemu je $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ (u stvari, ovde su f i g neprekidne u nuli i $f(0) = g(0) = 0$), dakle, javlja se neodređenost oblika $\frac{0}{0}$. Limes količnika njihovih izvoda je:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x(1 - \cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2.$$

Na osnovu Lopitalovog pravila zaključujemo da je i

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{tg\, x - x}{x - \sin x} = 2.$$

Primer 13. Naći $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$.

Rešenje. Funkcije $f(x) = 1 - \cos x^2$ i $g(x) = x^2 \sin x^2$ zadovoljavaju uslove *posledice.* Primenom Lopitalove teoreme dobija se

$$\lim_{x\to 0} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin x^2}{2x \sin x^2 + 2x^3 \cos x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{\sin x^2 + x^2 \cos x^2}.$$

Zamenom vrednosti za x ponovo se dobija neodređeni izraz oblika $\frac{0}{0}$. U ovom se slučaju ponovo primenjuje Lopitalova teorema i dobija

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x^2)\prime}{(\sin x^2 + x^2 \cos x^2)\prime} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \cos x^2}{4x \cos x^2 - 2x^3 \sin x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2}{2 \cos x^2 - x^2 \sin x^2}.$$

Rešenje ove granične vrednosti nakon zamene vrednosti za x je $\frac{1}{2}$. Dakle, nakon dvostruke primene Lopitalovog pravila zaključuje se da je $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2} = \frac{1}{2}$.

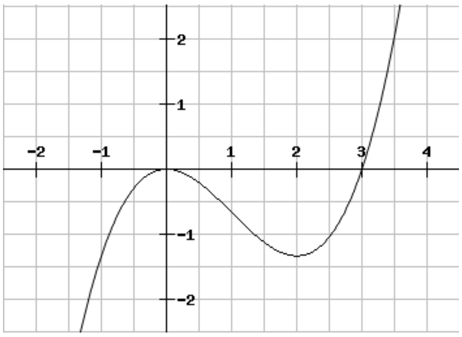
4.6 PRIMENA IZVODA NA ISPITIVANJE TOKA FUNKCIJE

Teorema 10.[18] Neka je funkcija f diferencijabilna u intervalu (a, b). Ako je $f'(x) > 0$, za svako $x \in (a, b)$, tada je funkcija f rastuća u tom intervalu. Ako je $f'(x) < 0$, za svako $x \in (a, b)$, onda je funkcija f opadajuća u tom intervalu. U tački $f'(x) = 0$ nalazi se maksimum ili minimum funkcije.

[18] Dokazi teorema 10. i 11. mogu se naći u [6] .

Primer 14. Ispitati monotonost funkcije $y = \frac{x^3}{3} - x^2$.

Rešenje. Kako je $y' = x^2 - 2x = x(x-2)$, to se lako zaključuje da je $y' > 0$ za $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, tj. u tim intervalima funkcija raste, dok je $y' < 0$ za $x \in (0,2)$, pa u tom intervalu funkcija opada. Za $x = 0$ funkcija ima maksimum, a za $x = 2$ minimum (slika 8.).

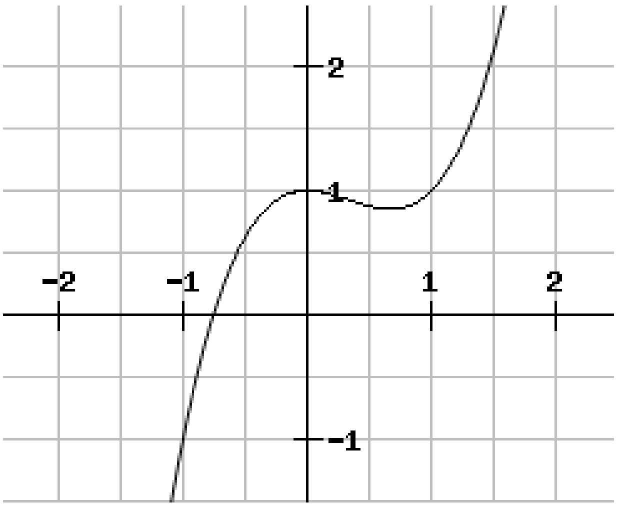


Slika 8.

Teorema 11. Ako funkcija f u intervalu (a, b) ima pozitivan drugi izvod, tada je ona u tom intervalu konveksna, a ako je drugi izvod negativan, onda je funkcija konkavna. Tačka u kojoj je $f''(x) = 0$ je prevojna tačka.

Primer 15. U pogledu konveksnosti ispitati funkciju $y = x^3 - x^2 + 1$.

Rešenje. Prvi izvod ove funkcije je $y' = 3x^2 - 2x$, a drugi $y'' = 6x - 2 = 6\left(x - \frac{1}{3}\right)$. Ako $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ tada je $y'' < 0$, pa je funkcija konveksna, dok je u intervalu $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ $y'' > 0$ i funkcija je konkavna. Funkcija ima prevojnu tačku ($y'' = 0$) za $x = \frac{1}{3}$ (slika 9.).



Slika 9.

5. PRIMENA IZVODA FUNKCIJE U FIZICI

U prvom poglavlju ovog rada, kao jedan od načina definisanja izvoda korišćena je brzina. Sada će preko izvoda biti definisane brzina, ubrzanje i druge fizičke veličine. Iako se izvod primenjuje u svim oblastima fizike prilikom ispitivanja promene nekog stanja posmatranog tela ili čestice, ovde će biti reči samo o osnovnim veličinama u mehanici i kinematici.

5.1 BRZINA I UBRZANJE

Brzina je promena položaja po vremenu. Matematički, ovo se zapisuje kao

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

pri čemu je Δs promena položaja, a Δt promena vremena.

Ukoliko se promena ispituje u jednom trenutku vremena dobija se trenutna brzina. Tada je vremenski period beskonačno mali, odnosno $\Delta t \to 0$, pa se za određivanje brzine koristi izvod na sledeći način:

$$v_{tr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t) = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$ [19]

Ubrzanje je promena brzine po vremenu. Prilikom korišćenja izvoda za nalaženje ubrzanja zapravo se traži koliko brzo se menja brzina posmatranog tela ili čestice. Dakle, potreban je prvi izvod brzine po vremenu, odnosno drugi izvod položaja po vremenu.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$$

Primer 16. Tačka se kreće pravolinijski po zakonu $s = 2t^3 + t^2 - 4$. Odrediti brzinu i ubrzanje u trenutku $t = 4$.

Rešenje. Brzina u ma kom trenutku vremena je: $v = \dot{s}(t) = 6t^2 + 2t$. U trenutku $t = 4$ brzina će biti: $v = \dot{s}(4) = 6 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 = 104$. Analogno, ubrzanje će biti: $a = \ddot{s}(t) = 12t + 2 \Rightarrow a = \ddot{s}(4) = 12 \cdot 4 + 2 = 50$.

5.2 IMPULS, DINAMIČKA SILA, SILA INERCIJE I TRZAJ

Brzina i ubrzanje predstavljaju primere kinematičkih karakteristika kretanja čestice, jer se izražavaju samo pomoću komponenata vektora položaja i njihovih izvoda po vremenu. Sada će biti definisane dinamičke karakteristike u kojima figuriše i masa čestice.

[19] U fizici se za izvod funkcije umesto y' češće koriste oznake $\frac{dy}{dx}$ ili $\dot{y}$.

Impuls čestice se definiše kao proizvod mase i brzine, pa ako se iskoristi gore dobijena formula za brzinu pomoću izvoda, dobija se:

$$p = mv = m\dot{s}$$

Dinamička sila čestice predstavlja proizvod mase i ubrzanja. U ovom se izrazu, dakle, pojavljuje drugi izvod funkcije.

$$F = ma = m\ddot{s}$$

Sila inercije je po intenzitetu jednaka dinamičkoj sili čestice ali je suprotnog smera. Stoga će izraz biti isti, ali sa znakom „-" u njemu.

$$F = -ma = -m\ddot{s}$$

Primena trećeg izvoda u fizici se retko sreće, pa je ovde data čisto ilustracije radi. **Trzaj** je dinamička veličina koja se može definisati na sledeći način:

$$j = m\dddot{s}$$

6. LITERATURA

[1] V. Bogoslavov, *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 4*, 44. ispravljeno izdanje, Zavod za udžbenike, Beograd 2013.

[2] Chipps J., *2012. Position, Velocity, Acceleration*. Dostupno na: http://www.beyondcalculus.com/derivatives/physics.html, pristupljeno 27.9.2015.

[3] Z. Kadelburg, V. Mićić, S. Ognjanović, *Analiza sa algebrom 3*, „KRUG", Beograd 1998.

[4] Z. Kadelburg, V. Mićić, S. Ognjanović, *Analiza sa algebrom 4*, „KRUG", Beograd 1999.

[5] B. Milić, *Njutnova mehanika*, Izdavačka jedinica Univerziteta u Nišu, Niš 1983.

[6] G. Milovanović, R. Đorđević, *Matematička analiza I*, Dostupno na: http://www.mi.sanu.ac.rs/~gvm/Teze/MatematickaAnalizaI.pdf, pristupljeno 3.12.2015.

[7] M. Mlađenović, *Koraci otkrića prirode*, 1. izdanje, IP „Gradina", Niš 1991.

[8] O. Murphy, *Discovering Maths 4*, Folens Publishers, Dublin 2002.

[9] M. Obradović, D. Georgijević, *Matematika za 4. razred srednje škole*, 13. izdanje, Zavod za udžbenike, Beograd 2011.

[10] O'Connor J, Robertson E. 2015. MacTutor History of Mathematics archive. Dostupno na: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html, pristupljeno 27.9.2015.

[11] S. Živković-Zlatanović, *Matematička analiza I* (rukopis).